Семинар 11. Парадокс ЭПР. Неравенства Белла.

В 1927 году Альберт Эйнштейн выступил против вероятностной трактовки математической модели квантовой механики, принадлежащей Нильсу Бору и Максу Борну. Хорошо известна его фраза «*Бог не играет в кости*». В 1935 году Эйнштейн вместе с Подольским и Розеном написал статью, в которой более подробно аргументировал неполноту квантовой механики. Сформулированный в статье парадокс носит название ***парадокса ЭПР***. В последовавшей за этим двадцатилетней дискуссии Эйнштейна и Бора выработалась общепринятая сегодня ***копенгагенская интерпретация*** квантовой механики.

В своей первоначальной трактовке парадокс ЭПР выглядел следующим образом: рассмотрим процесс, в котором некая частица распадается на две других. По закону о сохранении импульсов их импульсы жестко связаны. Измеряя импульс одной частицы, мы тем самым узнаем импульс другой частицы. Теперь измерив координату второй частицы, мы тем самым измерим одновременно и ее координату, и импульс, тогда как в рамках квантовой механики одновременно измерение некоммутирующих величин невозможно.

С точки зрения копенгагенской интерпретации парадокса просто нет – при измерении координаты второй частицы мы изменим ее состояние, и даже если ранее она находилась в состоянии с фиксированным импульсом – это состояние было нами безнадежно испорчено.

Проблема данной дискуссии заключается в том, что долгое время она лежала в области философских воззрений на теорию, никак не проявляющихся в эксперименте. В 1951 году Дэвидом Бомом был предложен вариант парадокса ЭПР, приближающий его к экспериментальной проверке. Вместо закона сохранения импульса было предложено использовать закон сохранения спина частиц, позволяющий создать систему двух коррелированных электронов с суммарным спином, равным нулю. Если обозначить состояние электрона со спином, направленным вверх, волновой функцией $\left|u\right\rangle$, а со спином, направленным вниз - $\left|d\right\rangle$, то волновая функция двух электронов будет иметь вид $\left|\psi\right\rangle = \left(\left|u,d\right\rangle - \left|d,u\right\rangle\right)\big/\sqrt{2}$. Особенность этой волновой функции в том, что ее нельзя записать как произведение волновых функций первого и второго электрона. Такие состояния называют «*перепутанными*».

В дальнейшем чаще рассматривался аналогичный эксперимент, в котором вместо электронов рассматривались одновременно испущенные фотоны с ортогональными поляризациями. Такие фотоны могут возникать в результате двухфотонного излучения или при спонтанном параметрическом рассеянии (в последнем случае пара коррелированных фотонов носит название бифотона). Волновая функция бифотона по-прежнему имеет вид $\left|\psi\right\rangle = \left(\left|V,H\right\rangle - \left|H,V\right\rangle\right)\big/\sqrt{2}$, где $\left|V\right\rangle$ - вертикально, а $\left|H\right\rangle$ - горизонтально поляризованный фотон, и не зависит от выбора базиса: если рассматривать поляризацию относительно оси, наклоненной на 45°, то волновая функция имеет вид $\left|\psi\right\rangle = \left(\left|+,-\right\rangle - \left|-,+\right\rangle\right)\big/\sqrt{2}$, где $\left|+\right\rangle$ - фотон с поляризацией под 45°, а $\left|-\right\rangle$ - ортогональный ему фотон с поляризацией под -45°.

Согласно постулатам квантовой механики при измерении поляризации одного фотона происходит редукция волновой функции, и второй фотон оказывается в состоянии с фиксированной поляризацией. Однако к моменту измерения фотоны может разделять большое расстояние, и согласно постулатам теории относительности второй фотон не мог мгновенно узнать о произошедшем с первым фотоном. С точки зрения Эйнштейна, это означает, что на самом деле состояние обоих фотонов было определено с самого начала, просто мы не знали, каким оно было. Другими словами, существует некий скрытый параметр, определяющий результаты измерения обоих фотонов. Таким образом, формулировка парадокса ЭПР в трактовке Бома предлагает в качестве альтернативы копенгагенской интерпретации ***теорию***

скрытых параметров, утверждающую, что невозможность получить полную информацию о состоянии частицы – недостаток наших знаний о системе, а не принципиальное свойство природы.

Описанный эксперимент оставался умозрительным до 1964 года, когда Белл сформулировал ***неравенства Белла***, которые всегда выполняются в рамках теории скрытых параметров, но нарушаются в квантовой механике. Для вывода неравенства Белла рассмотрим эксперимент, в котором производится измерение поляризации двух коррелированных фотонов. Каждый из фотонов попадает на поляризационное зеркало (в качестве которого обычно используют поляризационные призмы), которое пропускает фотоны, поляризация которых направлена вдоль оси зеркала, и отражает ортогонально поляризованные фотоны. Фотон с поляризацией, составляющей угол φ с осью зеркала, по закону Малюса проходит через него с вероятностью $cos^2\varphi$ и отражается с вероятностью $sin^2\varphi$. Детекторы (по два на каждое зеркало) регистрируют как прошедшие, так и отраженные фотоны. Пусть величина $A(\alpha)$ равна единице, если первый фотон прошел через зеркало, и минус единице, если отразился. Угол α определяет направление оси поляризационного зеркала. Аналогично, $B(\beta)=\pm 1$ определяет результат измерения второго фотона.

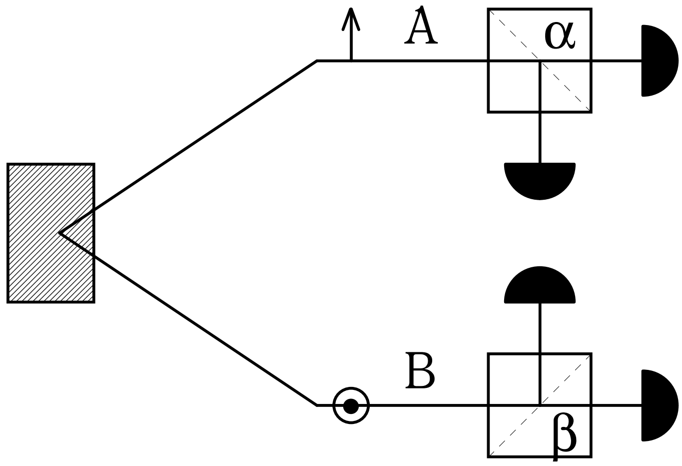

Рис.1. Схема эксперимента по измерению поляризаций двух фотонов

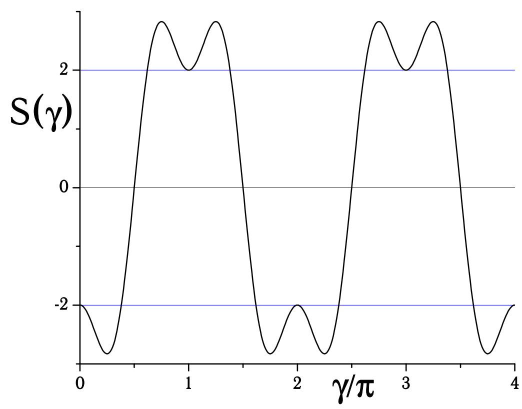

Рис.2. Поведение наблюдаемой Белла (см. ниже)

Очевидно, при измерении одного фотона величины A и B с одинаковой вероятностью $P(1)=P(-1)=1/2$ принимают одно из двух значений, а результат их совместного измерения зависит от разности углов $\varphi=\alpha-\beta$. Поскольку фотоны имеют ортогональную поляризацию, то при $\varphi=\pi/2$ значения A и B полностью коррелируют, а при $\varphi=0$ - антикоррелируют. Если сначала измеряется первый фотон, то с точки зрения квантовой механики в момент его измерения определяется поляризация второго фотона: если первый фотон прошел через зеркало, то поляризация второго фотона становится перпендикулярна оси α, а если первый отразился – то поляризация второго фотона параллельна этой оси. Далее вероятность прохождения или отражения второго фотона определяется по закону Малюса углом между поляризацией фотона $\alpha+\pi/2$ и углом β, определяющим ориентацию второго зеркала. Таким образом, среднее значение произведения величин A и B, называемое коэффициентом корреляции

$$E(\alpha,\beta)=\langle A(\alpha)B(\beta)\rangle=P_{++}(A,B)-P_{+-}(A,B)-P_{-+}(A,B)+P_{--}(A,B)=$$
$$=\left(sin^2\varphi-cos^2\varphi-cos^2\varphi+sin^2\varphi\right)/2=-cos\,2\varphi$$

Для вывода неравенства Белла запишем наблюдаемую Белла - комбинацию произведений A и B для разных значений углов α и β:

$$S(\alpha,\alpha',\beta,\beta') = A(\alpha)B(\beta) - A(\alpha')B(\beta) + A(\alpha)B(\beta') + A(\alpha')B(\beta') =$$
$$= B(\beta)\left[A(\alpha) - A(\alpha')\right] + B(\beta')\left[A(\alpha) + A(\alpha')\right]$$

Поскольку величина $A = \pm 1$, то одна из двух квадратных скобок всегда равна нулю, а другая двойке. Отсюда следует, что наблюдаемая Белла $S(\alpha,\alpha',\beta,\beta') = \pm 2$, а ее среднее значение удовлетворяет неравенству $\left|\left\langle S(\alpha,\alpha',\beta,\beta')\right\rangle\right| \le 2$. Это неравенство – следствие теории скрытых параметров, потому что оно выведено в предположении о существовании совместной функции распределения вероятностей четырех измеряемых величин $P\left\{A(\alpha), A(\alpha'), B(\beta), B(\beta')\right\}$.

С другой стороны, среднее значение наблюдаемой Белла имеет вид комбинации коэффициентов корреляции $\left\langle S(\alpha,\alpha',\beta,\beta')\right\rangle = E(\alpha,\beta) - E(\alpha',\beta) + E(\alpha,\beta') + E(\alpha',\beta')$, т.е. является функцией трех углов $\varphi = \alpha - \beta$, $\chi = \beta' - \alpha$ и $\theta = \alpha' - \beta'$ $(\alpha' - \beta = \theta + \chi + \varphi)$:

$$\left\langle S(\alpha,\alpha',\beta,\beta')\right\rangle = cos\,2(\theta + \chi + \varphi) - cos\,2\varphi - cos\,2\chi - cos\,2\theta$$

Чтобы показать, что полученное выражение нарушает неравенство Белла, достаточно выбрать все три угла равными $2\varphi = 2\chi = 2\theta = \gamma$: $\left\langle S(\gamma)\right\rangle = cos\,3\gamma - 3\,cos\,\gamma$. Экстремум функции достигается при $sin\,3\gamma = sin\,\gamma$, максимумам и минимумам соответствуют значения $\gamma = \pi/4 + \pi n/2$, при которых $\left\langle S(\gamma)\right\rangle = \pm 2\sqrt{2}$.

Начиная с 1972 года нарушение неравенств Белла было неоднократно зарегистрировано в различных экспериментах. В справедливости квантовой механики и до этого не было особых сомнений, однако эксперименты по нарушению неравенств Белла показали, что любые попытки интерпретировать ее предсказания при помощи теории скрытых параметров заранее обречены. Для того чтобы в рамках классических представлений объяснить нарушение неравенств Белла, необходимо ввести одно из двух предположений: допустить возможность распространения сигнала от первой частицы ко второй со скоростью большей скорости света либо допустить, что функция распределения вероятностей может принимать отрицательные значения. С первым из предположений связано то, что квантовую механику иногда называют «*нелокальной*» теорией.

Экспериментальную проверку нарушений неравенств Белла можно считать финалом дискуссии Эйнштейна и Бора, подтвердившим адекватность копенгагенской интерпретации квантовой механики. Тем не менее, дискуссии об интерпретациях квантовой механики на этом не прекратились. Существует альтернативная копенгагенской ***многомировая интерпретация*** квантовой механики, введенная Эвереттом и Девиттом. Ее преимуществом является возможность обойтись без постулата редукции – его место занимает предположение о множественности миров и о том, что в момент измерения мы производим выбор одного из них. Существуют также дальнейшие попытки объяснить нарушение неравенств Белла с классической точки зрения или обосновать несостоятельность экспериментов по их проверке. Однако следует понимать, что надежность предсказаний квантовой механики подтверждается многочисленными экспериментами и не зависит от того, как именно мы интерпретируем (т.е. объясняем словами) квантовомеханические формулы.